Ecole Polytechnique
session 1990
Option M' - deuxième composition

solution proposée par Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159,
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

NB : Le sujet de l'épreuve n'est pas joint à ce document. Il pourra être téléchargé au format pdf sur le site http://perso.wanadoo.fr/megamaths/

[0] [ag16s] v1.00
© 2003, D.-J. Mercier. Vous pouvez faire une copie de ces notes pour votre usage personnel.

Question préliminaire : $\{0\}$ n'est pas irréductible car tout sev V de E est stable par $\{0\}$. $\mathcal{L}$ est irréductible car si V est un sev stable par $\mathcal{L}$ et distinct de $\{0\}$ et E, on a : $\forall f \in \mathcal{L}$ $f(V) \subset V$; et W est un supplémentaire de V (non réduit à $\{0\}$), notons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E tq $(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de V et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de W.

$f(e_1) = e_{p+1}$ et $f(e_i) = e_i$ si $i \neq 1$ définissent une appl. linéaire f tq $f(V) \not\subset V$, absurde. Donc $V = \{0\}$ ou E i.e. $\mathcal{L}$ est irréductible.

FAIT A NUCETTO
le 3 août 1992

I-1a L'ensemble $\mathcal{M} = \{ M$ sev de E / $M \neq 0$ et $\forall a \in \mathcal{A}$ $\forall m \in M$ $am \in M \}$ n'est pas vide (car contient E et $E \neq 0$ d'après le préliminaire).

La partie $\{\dim M / M \in \mathcal{M}\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ et possède un plus petit élément $n_0 = \dim M_0$ où $M_0 \in \mathcal{M}$.

I.1.b * $\hat{e}(M)$ est un sev de E comme image du sev M par l'application linéaire $\hat{e}$.

$\forall a \in \mathcal{A}$ $\forall x \in \hat{e}(M)$ $\exists b \in M$ $x = \hat{e}(b) = b(e)$

d'où $ax = a(b(e)) = \underbrace{ab}_{\in \mathcal{A}}(e) = \hat{e}(ab) \in \hat{e}(M)$

ce qui prouve que $\hat{e}(M)$ est stable par $\mathcal{A}$.

* $\left.\begin{array}{l}\hat{e}(\mathcal{M}) \text{ stable par } \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \text{ irréductible} \\ \hat{e}(\mathcal{M}) \neq \{0\}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\hat{e}(\mathcal{M}) = E}$

D'après le Théorème durang appliqué à $\hat{e}|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to E$:

$$\dim \mathcal{M} = \underbrace{\dim \hat{e}(\mathcal{M})}_{=\dim E = n} + \dim \operatorname{Ker}\hat{e} \cap \mathcal{M} \geq n$$

I-1 c $\forall a \in \mathcal{A} \quad \forall b \in \operatorname{Ker}\hat{e} \quad \hat{e}(ab) = ab(e) = a(b(e)) = a(\underbrace{\hat{e}(b)}_{0}) = 0$

montre que $ab \in \operatorname{Ker}\hat{e}$.

Par suite $\operatorname{Ker}\hat{e} \in \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}' \doteq \mathcal{M} \cap \operatorname{Ker}\hat{e}$ sera aussi dans $\mathcal{M}$.

Donc $\dim \mathcal{M}' \geq \dim \mathcal{M}$ ou $\mathcal{M}' = 0$. Comme $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, on aura soit $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ soit $\mathcal{M}' = 0$

$\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ entraînerait $\mathcal{M} \subset \operatorname{Ker}\hat{e}$ ce qui est absurde car $\hat{e}(m) \neq 0$. Donc $\boxed{\mathcal{M} \cap \operatorname{Ker}\hat{e} = \{0\}}$

I-1 d

$\hat{e}|_{\mathcal{M}}$ est injective d'après a) et surjective d'après b).

$\hat{e}|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to E$ sera donc bijective et $\boxed{\dim \mathcal{M} = n}$

I.2.a

$h(m(e)) = m(x)$ s'écrit $h \circ \hat{e}(m) = \hat{x}(m) \quad \forall m \in \mathcal{M}$

ou encore : $h \circ \hat{e}|_{\mathcal{M}} = \hat{x}|_{\mathcal{M}}$ (*)

$\hat{e}|_{\mathcal{M}}$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}$ sur E d'après I.1, et il suffit de prendre $h = \hat{x}|_{\mathcal{M}} \circ (\hat{e}|_{\mathcal{M}})^{-1}$ pour avoir (*).

* Si $m(x) = 0$ pour tout $m \in \mathcal{M}$, on a $h = 0$.
* Sinon il existe $m \in \mathcal{M}$ tq $m(x) \neq 0$ et la I.1 s'applique avec x à la place de e. $\hat{x}|_{\mathcal{M}}$ sera un isomorphisme et h aussi.

I.2.b

$am \in \mathcal{M}$ donc $am(x) = h\,am(e)$ d'après I.2.a.
D'autre part $a\,hm(e) = am(x)$, d'où l'égalité $h\,am(e) = a\,hm(e)$
Ainsi $ha(m(e)) = ah(m(e))$ pour tout $m \in \mathcal{M}$. Comme $\hat{e}(\mathcal{M}) = E$, on aura $ha = ah$.

I.2.c

* Soit E_λ le sev propre de h associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$
a commute avec h donc $a(E_\lambda) \subset E_\lambda$
(en effet : $\forall y \in E_\lambda \quad h(a(y)) = a(h(y)) = a(\lambda y) = \lambda\, a(y) \Rightarrow a(y) \in E_\lambda$)
et $\mathcal{A}$ étant irréductible : $E_\lambda = 0$ ou E
Comme $E_\lambda \neq 0$, on aura $E_\lambda = E$ et h sera l'homothétie de rapport λ.

* Notons $h_x = \lambda_x \mathrm{Id}$ puisque h dépend du choix de x.

On a : $\forall m \in \mathcal{M} \quad \begin{cases} m(x) = \lambda_x m(e) \\ m(x') = \lambda_{x'} m(e) \end{cases} \Rightarrow m(x+x') = (\lambda_x + \lambda_{x'})\, m(e)$
$= (\lambda_{x+x'})\, m(e)$

d'où $\lambda_x + \lambda_{x'} = \lambda_{x+x'}$

et : $\forall k \in \mathbb{C} \quad m(kx) = k\,m(x) \Rightarrow \lambda_{kx}\, m(e) = k\, \lambda_x\, m(e)$
d'où $\lambda_{kx} = k \lambda_x$, $x \longmapsto \lambda_x$ est linéaire

I 2 d

* $m(x-\lambda e) = \underbrace{m(x)} - \lambda m(e) = 0$ donc $x - \lambda e \in \ker m$
$= h m(e) = \lambda m(e)$

* $m(x) = \lambda_x m(e)$ entraine $\operatorname{Im} m \subset \mathbb{C}\, m(e)$ donc $\operatorname{rg} m = 0$ ou 1.
Comme $m(e) \neq 0$, on aura $\operatorname{rg} m = 1$ dès que $m \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$.

* Si $m \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, $\ker m = \{x \in E / \lambda_x = 0\}$ est le noyau de l'appl. linéaire $x \longmapsto \lambda_x$ non nulle ($\lambda_e = 1$), et ne dépendra pas du choix de m.

Notons H cet hyperplan.

* Soit $\mathcal{H}'$ l'ensemble des endomorphismes de E nuls ou de noyau H.
$\mathcal{H} \subset \mathcal{H}'$. Réc., rappelons que $e \notin H$ et que, H étant un hyperplan :

$$E = H \oplus \mathbb{C} e$$

Si m est fixé dans $\mathcal{H}$ tel que $m(e) \neq 0$, et si $m' \in \mathcal{H}' \setminus \{0\}$, on a :

$$m'(x) = \frac{m'(e)}{m(e)}\, m(x) \qquad \forall x \in E \qquad (\text{puisque } \ker m = H)$$

d'où : $m' = \frac{m'(e)}{m(e)}\, m \in \mathcal{H}$. Finalement $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$.

I 3 a

$$\mathcal{H}_1 = \{\beta \in \mathcal{A} / \ker \beta = H_1\} \cup \{0\}$$

$\mathcal{H}_1 = \mathcal{A}$ entraînerait que H_1 soit stable par $\mathcal{A}$, ce qui est absurde car $\mathcal{A}$ est irréductible.

I 3 b

* Si la décomposition de $a \in \mathcal{A}$ existe, on aura :

$$a = m + b \qquad m \in \mathcal{M}_1 \text{ et } b \in \operatorname{Ker} \hat{e}_1$$

donc $a(e_1) = m(e_1)$ et $m|_{H_1} = 0$ ($\operatorname{car} \mathcal{M}_1 = \{\beta \in \mathcal{A} / \operatorname{Ker} \beta \supset H_1\}$)

Comme $e_1 \notin H_1$ (car H_1 est l'hyperplan $H_1 = \{x / \lambda_{e_1} = 0\}$ et $\lambda_{e_1} = 1$, avec les notations de I.2), m sera unique et déterminé par :

$$\begin{cases} m = 0 \text{ sur l'hyperplan } H_1 \\ m(e_1) = a(e_1) \end{cases} \qquad (*)$$

et $b = a - m$

D'où l'unicité de la décomposition, si elle existe.

* Montrons que cette décomposition convient : si $a \in \mathcal{A}$ est donné, définissons m et b par (*). Alors $\operatorname{Ker} m \supset H_1$ donc $m \in \mathcal{M}$.
Enfin : $\hat{e}_1(b) = \hat{e}_1(a-m) = a(e_1) - m(e_1) = 0$ donc $b \in \operatorname{Ker} \hat{e}_1$.

Ccl : $\boxed{\mathcal{A} = \mathcal{M}_1 \oplus \operatorname{Ker} \hat{e}_1}$

I 3 c On recommence les I.1 et I.2 avec $\operatorname{Ker} \hat{e}_1$ à la place de $\mathcal{A}$: on obtient un sev $\mathcal{M}_2$ de $\operatorname{Ker} \hat{e}_1$ de dimension minimale vérifiant la condition annoncée (*). On a $\dim \mathcal{M}_2 = n$ et :

$$\operatorname{Ker} \hat{e}_1 = \mathcal{M}_2 \oplus \operatorname{Ker} \hat{e}_2|_{\operatorname{Ker} \hat{e}_1}$$

où $e_2 \in E$ est tel que $m(e_2) \neq 0$ pour un élément non nul m de $\mathcal{M}_2$.

D'où $\mathcal{A} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus (\operatorname{Ker} \hat{e}_2 \cap \operatorname{Ker} \hat{e}_1)$.

(*) L'ensemble des $\mathcal{M}$ sev de $\operatorname{Ker} \hat{e}_1$ vérifiant $\forall a \in \mathcal{A}$ $\forall m \in \mathcal{M}$ $am \in \mathcal{M}$ n'est pas réduit à $\{0\}$. $\operatorname{Ker} \hat{e}_1$ en est un, en effet : $\forall a \in \mathcal{A}$ $\forall m \in \operatorname{Ker} \hat{e}_1$ $\hat{e}_1(am) = am(e_1) = a\hat{e}_1(m) = a \cdot 0 = 0$ donc bien $am \in \operatorname{Ker} \hat{e}_1$.

I3d On continue le c) par récurrence finie, tant que $\operatorname{Ker}\hat{a}_i \cap \operatorname{Ker}\hat{e}_{i-1} \cap \dots \cap \operatorname{Ker}\hat{e}_1 \neq 0$

D'où le résultat annoncé :

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_n$$

avec 1) $\forall a \in \mathcal{A} \quad \forall m \in \mathcal{M}_i \quad am \in \mathcal{M}_i$

2) $\exists e_i \in E \quad \hat{e}_i|_{\mathcal{M}_i} : \mathcal{M}_i \to E$ est bijective

I4a

$H_i = \operatorname{Ker} m$ où $m \in \mathcal{M}_i \setminus \{0\}$

$l_i \in E^*$ et $\operatorname{Ker} l_i = H_i$

$V = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$

$\forall a \in \mathcal{A} = \mathcal{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_n \quad a = m_1 + \dots + m_n$ où $m_i \in \mathcal{M}_i$

Cela entraîne $a(V) = 0$. V sera donc stable par tout $a \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ étant irréductible, on aura $V = 0$ ou $V = E$. $V = E$ étant impossible (car $V \subset H_1$ et H_1 est un hyperplan) on aura $\boxed{V = 0}$.

I4b On sait que $V^\perp = \left(\bigcap_{i=1}^{n} H_i\right)^\perp = \sum_{i=1}^{n} H_i^\perp = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C} l_i$

I4c $V = 0 \Rightarrow V^\perp = E^*$ donc $E^* = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C} l_i$

Comme $\dim E^* = n$, on aura $r \geq n$

I5 Toute sous-algèbre irréductible $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ s'écrira

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_n \quad \text{avec } r \geq n$$

Comme $\dim \mathcal{M}_i = r$, on aura $\dim \mathcal{A} = rn \geq n^2$ qui, allié à $\dim \mathcal{A} \leq \dim \mathcal{L} = n^2$, entraîne $\underline{\mathcal{A} = \mathcal{L}}$

II 6a

g = sgroupe de $GL(E)$

$\langle g \rangle$ = sev de $\mathcal{L}$ engendré par g

$\forall a \in \mathcal{L}$ $t_a \in \mathcal{L}^*$ est défini par $t_a(b) = \mathrm{tr}(ab)$ $\forall b \in \mathcal{L}$.

$\mathcal{L} \to \mathcal{L}^*$, $a \mapsto t_a$ est linéaire car $t_{a+\lambda a'}(b) = \mathrm{tr}((a+\lambda a')b) = \mathrm{tr}(ab) + \lambda \mathrm{tr}(a'b)$

$= (t_a + \lambda t_{a'})(b)$ donc $t_{a+\lambda a'} = t_a + \lambda t_{a'}$

Let $\mathcal{L}^*$ ont même dimension, de sorte que l'application $a \mapsto t_a$ sera bijective ssi elle est injective : tout revient à montrer que son noyau est réduit à $\{0\}$, ie :

$$t_a = 0 \Rightarrow a = 0$$

1ère méthode :

$t_a = 0 \iff \forall b \in \mathcal{L}$ $\mathrm{tr}(ab) = 0$

Supposons que $a \neq 0$ et montrons qu'il existe $b \in \mathcal{L}$ tel que $\mathrm{tr}(ab) \neq 0$:

$\exists e_1$ / $a(e_1) \neq 0$

1er cas : Si $a(e_1) = e_2$ et (e_1, e_2) libre, on complète en une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E et on définit $b \in \mathcal{L}$ par $b(e_i) = e_1$ $\forall i$

Alors $ab(e_i) = a(e_1) = e_2$ pour tout i,

$$\mathrm{Mat}(ab ; e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \mathrm{tr}(ab) = 1 \neq 0$$

2ème cas : Si $a(e_1) = \lambda e_1$ $(\lambda \neq 0)$, on définit b de la même façon,

$$\mathrm{Mat}(ab ; e) = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ & & 0 & \end{pmatrix} \text{ donc } \mathrm{tr}(ab) = \lambda \neq 0$$

2ème méthode : On suppose que $t_a = 0$ ie $\mathrm{tr}(ab) = 0 \quad \forall b \in \mathcal{L}$

Fixons une base e de E, soient $A = (a_{ij})$ la matrice de a dans cette base, et E_{ij} une matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On vérifie que $\mathrm{tr}(AE_{ij}) = a_{ji}$, donc $a_{ji} = 0 \quad \forall j, i$ par hypothèse et $a = 0$.

II.6.b

* Soit $\mathcal{G}$ irréductible. Si V est un sev stable par $\langle \mathcal{G} \rangle$, il sera à fortiori stable par $\mathcal{G}$, irréductible, donc $V = 0$ ou $V = E$. $\langle \mathcal{G} \rangle$ sera irréductible

* $\langle \mathcal{G} \rangle$ = sev engendré par $\mathcal{G}$ = ens. des comb. linéaires finies d'éléments de $\mathcal{G}$ donc $\forall a, b \in \langle \mathcal{G} \rangle \quad a.b \in \langle \mathcal{G} \rangle$ et $\langle \mathcal{G} \rangle$ sera bien une sous-algèbre de $\mathcal{L}$.

$\langle \mathcal{G} \rangle$ est une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}$ donc (I,5) $\langle \mathcal{G} \rangle = \mathcal{L}$.

* $\mathcal{L}$ est donc engendré par les éléments de $\mathcal{G}$. Via l'isomorphisme $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}^*$, $\mathcal{L}^*$ sera engendré par $(t_g)_{g \in \mathcal{G}}$.
$a \longmapsto t_a$

II.7.a

On a $t_g(g') = \mathrm{tr}(gg')$ et $\{ \mathrm{tr}(gg') \,/\, g, g' \in \mathcal{G} \} = \{ \mathrm{tr}(g) \,/\, g \in \mathcal{G} \}$

$g^s = Id$ montre que les valeurs propres de g sont toutes des racines s-ième de l'unité. g étant trigonalisable (car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos) on constate que $\mathrm{tr}(g)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, à savoir des somme de n racines s-ièmes de l'unité.

II.7.b g irréductible $\underset{\text{II.6.b}}{\Rightarrow}$ $(t_g)_{g\in g}$ engendre $\mathcal{L}^*$

Il existe donc une base de $\mathcal{L}^*$ de la forme $(t_g)_{g\in g'}$, où $g'\subset g$ et $\#g' = n^2$.
Soit $(m_g)_{g\in g'}$ la base duale de $(t_g)_{g\in g'}$. On a :

$$\forall m\in g \qquad m = \sum_{g\in g'} t_g(m)\, m_g$$

donc g est fini puisque $t_g(m)$ décrit un ensemble fini de complexes (II.7.a)

II.8.a Posons $g_V = \{g_v / g\in g\}$ et $g_W = \{g_w / g\in g\}$

* La restriction $g|_V$ est injective comme restriction de la bijection g, donc g_v sera un endomorphisme injectif de V. V étant de dimension finie, g_v sera un automorphisme de V. Ainsi $g_V \subset GL(V)$.

* g_V n'est pas vide car contient Id_V. Si g et h sont dans g, $g_v\circ(h_v)^{-1} = (g\circ h^{-1})_v$ montre que $g_v\circ(h_v)^{-1}\in g_V$ (puisque $g\circ h^{-1}\in g$, g étant un groupe). Finalement, g_V est bien un sous-groupe de $(GL(V),\circ)$.

* On montre que $g_W \subset GL(W)$ en adaptant la démonstration précédente :
Soit $g\in g$. g_w est injective car :

$$g_w(x)=0 \iff x\in W \text{ et } g(x)=0 \iff x\in W \text{ et } g(x)\in \operatorname{Ker} g = V$$

V étant stable par l'automorphisme g, il sera invariant par g, donc aussi par g^{-1} et l'on aura : $x\in W\cap g^{-1}(V) = W\cap V = \{0\}$ donc $x=0$.
Enfin $g_W : W\to W$ linéaire injective et W de dimension finie assure que g_w est un automorphisme de W, soit $g_W\subset GL(W)$.

* Montrer que g_W est un sous-groupe de $GL(W)$ revient à montrer que :

$$(\alpha)\quad \forall g_w\in g_W \quad \forall h_w\in g_W \qquad g_w\circ h_w = (g\circ h)_w$$
$$(\beta)\quad \forall g_w\in g_W \qquad (g_w)^{-1} = (g^{-1})_w$$

preuve de (α) :
$(\alpha) \iff \forall x\in W \quad g\,g\,g\,h\,(x) = g\,g\,h(x)$
Posons $h(x) = v+w$ avec $v\in V$ et $w\in W$. On calcule :

$$\begin{cases} qgqh(x) = qg(w) \\ qgh(x) = q(\underbrace{g(v)}_{\in V} + g(w)) = qg(w) \end{cases} \quad \text{d'où l'égalité } (\alpha).$$

preuve de (β) :

$$(\beta) \Leftrightarrow \forall x \in W \quad (qg|_W)^{-1}(x) = qg^{-1}(x) \Leftrightarrow \forall x \in W \quad x = qgqg^{-1}(x)$$

On décompose encore $g^{-1}(x)$ dans $V \oplus W$:

$$g^{-1}(x) = v + w \quad \text{où } v \in V \text{ et } w \in W$$

d'où : $qgqg^{-1}(x) = qg(w) = q(\underbrace{x}_{\in W} - \underbrace{g(v)}_{\in V}) = x$ comme escompté.

• 2ème solution pour (β) : grâce à (α), on a :

$$g_W \circ (g^{-1})_W = (g \circ g^{-1})_W = I_W = q\,I|_W = I_W \text{ donc } (g_W)^{-1} = (g^{-1})_W$$

NB : Eclairage nouveau permettant de mieux comprendre pourquoi il est naturel que $g_V \subset GL(V)$, que $g_W \subset GL(W)$ et que (α) aient lieu.

Ecrivons la matrice de g dans une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ où $e' \doteq (e_1, \dots, e_p)$ est une base de V et $e'' \doteq (e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de W :

$$\mathrm{Mat}(g) = \left(\begin{array}{c|c} M_g & P_g \\ \hline 0 & N_g \end{array}\right) \begin{matrix} \updownarrow V \\ \updownarrow W \end{matrix} \quad \begin{matrix} \leftrightarrow V & \leftrightarrow W \end{matrix}$$

Cette base est bien adaptée à la situation, car on s'aperçoit que :

$$M_g = \mathrm{Mat}(g_V ; e')$$

$$N_g = \mathrm{Mat}(g_W ; e'')$$

Cela étant :

• g bijective $\Leftrightarrow \det \mathrm{Mat}(g;e) \neq 0 \Leftrightarrow \det M_g \cdot \det N_g \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \det M_g \neq 0 \\ \text{et} \\ \det N_g \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g_V \text{ bijective} \\ \text{et} \\ g_W \text{ bijective} \end{cases}$$

• Si $h \in g$, $\mathrm{Mat}(g \circ h ; e) \doteq \left(\begin{array}{c|c} M_{gh} & Q_{gh} \\ \hline 0 & N_{gh} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} M_g & Q_g \\ \hline 0 & N_g \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} M_h & Q_h \\ \hline 0 & N_h \end{array}\right)$

donc $\begin{cases} M_{gh} = M_g M_h \Leftrightarrow (g \circ h)_V = g_V \circ h_V & \text{et } (\alpha) \\ N_{gh} = N_g N_h \Leftrightarrow (g \circ h)_W = g_W \circ h_W \end{cases}$

II.8.b

* Expression de g en fonction de I et pgq :

1ère méthode :

On a $\begin{cases} g_V = I_V \\ g_W = I_W \end{cases}$ ie $\begin{cases} g|_V = I_V \\ qg|_W = I_W \end{cases}$

$g(x) = g(p(x)+q(x)) = p(x) + gq(x)$, et en composant les 2 membres par p puis q :

$$\begin{cases} pg(x) = p(x) + pgq(x) \\ qg(x) = qgq(x) = q(x) \end{cases} \quad \text{car } qg|_W = I_W$$

$$(p+q)g(x) = p(x) + q(x) + pgq(x)$$

$$g(x) = x + pgq(x)$$

$$\boxed{g = I + pgq}$$

2ème méthode : La meilleure ? En tous cas elle permet d'avoir l'idée du résultat, à savoir $g = I + pgq$. On écrit la matrice de g dans une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ où $e' \doteq (e_1, \dots, e_p)$ (resp. $e'' \doteq (e_{p+1}, \dots, e_n)$) est une base de V (resp. W)

$$\mathrm{Mat}(g ; e) = \begin{pmatrix} I_V & \text{////} \\ 0 & I_W \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow V \\ \updownarrow W \end{matrix} \quad (V' \text{ à gauche, } W \text{ à droite})$$

$$= I + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \text{////} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{c'est } \mathrm{Mat}(pgq ; e)}$$

NB : Si l'on n'est toujours pas convaincu, on peut vérifier, ensuite, que $g = I + pgq$ en calculant $I + pgq(x)$ quand $x \in V$ puis quand $x \in W$:

Si $x \in V$ $\quad (I+pgq)(x) = x + pgq(x) = x = g(x)$ ouf

Si $x \in W$ $\quad (I+pgq)(x) = \underbrace{x}_{= qg(x)} + pg\underbrace{q(x)}_{= x} = qg(x) + pg(x) = (q+p)g(x)$

$= g(x)$ ouf.

→ 11

* $g^2 = (I+pgq)(I+pgq) = I + 2pgq + \underbrace{pgqpgq}_{=0} = I+2pgq$

Ainsi $g^\Delta = I + \Delta pgq$

* $g \xrightarrow{\varphi} GL(V)\times GL(W)$ est injective car linéaire et
$g \longmapsto (g_V ; g_W)$

de noyau $\{I\}$. En effet :

$g \in \ker\varphi = \{g\in G \,/\, g_V = I_V \text{ et } g_W = I_W\}$ entraine $g^\Delta = I + 0\,pgq = I$

d'où $pgq = 0 \iff g-I = 0 \iff g = I$.

II.8.c

* Le résultat est trivial si $n=1$ (car alors les appl. lin. de E, de dim 1, sont les homothéties $g = k\,Id_E$, $k\in\mathbb{C}$, et la condition $g^\Delta = I$ entraine $k^\Delta = I$. k ne pouvant prendre qu'un nbre fini de valeurs (les racines Δ-ième de l'unité), G sera fini.

* Si $\dim E = n$, soit G un sgroupe de $GL(E)$. Si G est irréductible, alors G est fini (II.7.b). Si G n'est pas irréductible, on a :

$G_V \doteq \{g_V \,/\, g\in G\}$ est un sous-groupe de $GL(V)$ et $g_V^\Delta = I_V \;\forall g_V$
$G_W \doteq \{g_W \,/\, g\in G\}$ " " $GL(W)$ et $g_W^\Delta = I_W \;\forall g_W$ (*)

de sorte que l'hypothèse récurrente appliquée aux espaces vectoriels V et W de dimension $<n$ montre que G_V et G_W sont finis.

$G \xrightarrow{\varphi} G_V \times G_W$ étant injective, G sera fini et la récurrence aboutit.
$g \longmapsto (g_V, g_W)$

(*) En effet, d'après la propriété (α) du II.8.a :
$g_W^\Delta = (g_W)^\Delta = (g^\Delta)_W = I_W = q\,I|_W = I_W$.

III.9 Soit $g \in \mathcal{G}$ et λ une valeur propre de g. Il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tq $g(x) = \lambda x$, d'où $g^k(x) = \lambda^k x$.

$\lambda \neq 0$ car g bijective, et $x = \lambda g^{-1}(x)$ montre que $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de g^{-1}. On aura $g^{-k}(x) = \frac{1}{\lambda^k} x$. Posons $\inf_{g \in \mathcal{G}} \|g(x)\| = \alpha > 0$, alors :

$$\|g^k(x)\| \geq \alpha \quad \text{et} \quad \|g^{-k}(x)\| \geq \alpha$$

donc : $$\frac{\alpha}{\|x\|} \leq |\lambda|^k \leq \frac{\|x\|}{\alpha} \qquad (*)$$

Si $|\lambda| > 1$, $\lim_{k \to +\infty} |\lambda|^k = +\infty$ en contradiction avec $(*)$.

Si $|\lambda| < 1$, $\lim_{k \to +\infty} |\lambda|^k = 0$ " ".

Finalement $|\lambda| = 1$.

III.10.a

Avec les notations de II.7.b, tout élément de $\mathcal{G}$ s'écrit (II.6.b) :

$$g = \sum_{h \in \mathcal{G}'} t_h(g)\, m_h \qquad \text{avec} \quad t_h(g) = \operatorname{tr}(hg) \quad \text{et} \quad \#\mathcal{G}' = n^2$$

$hg \in \mathcal{G}$ donc ses valeurs propres sont de module 1 et $|\operatorname{tr}(hg)| \leq n$.

Par suite $\|g\| \leq n \sum_{h \in \mathcal{G}'} \|m_h\|$ sera borné.

III.10.b On a vu : $\exists M > 0 \quad \forall g \in \mathcal{G} \quad \|g\| \leq M$

Donc : $\forall x \neq 0 \quad \|g(x)\| \leq M \|x\|$

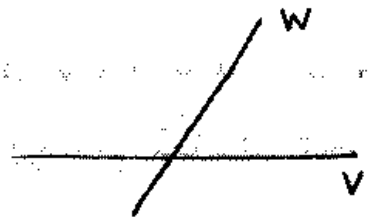
g^{-1} est aussi un élément de $\mathcal{G}$, donc $\forall x \neq 0 \quad \|g^{-1}(x)\| \leq M \|x\|$

et aussi : $\forall x \neq 0 \quad \|g^{-1}(g(x))\| \leq M \|g(x)\|$

soit $$0 < \frac{\|x\|}{M} \leq \|g(x)\|$$

On a bien $\inf_{g \in \mathcal{G}} \|g(x)\| > 0$.

III.11.a



Soient $(e_1, \dots, e_p)$ une base de V

$(e_{p+1}, \dots, e_n)$ " de W

$$\mathrm{Mat}(g ; e) = \begin{pmatrix} \overset{\longleftrightarrow}{M} \overset{V}{} & \overset{\longleftrightarrow}{N} \overset{W}{} \\ 0 & P \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} M = \mathrm{Mat}(g_V ; (e_1, \dots, e_p)) \\ P = \mathrm{Mat}(g_W ; (e_{p+1}, \dots, e_n)) \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique de g est donc le produit du polynôme caractéristique de g_V par celui de g_W. Ainsi tte valeur propre de g_V sera valeur propre de g.

III.11.b

On montre que

"Si $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $GL(E)$ tq $\forall g \in \mathcal{G}$ les valeurs propres de g sont de module 1, alors $\inf_{g \in \mathcal{G}} \|g(x)\| > 0$ pour tout $x \in E$ "

par récurrence sur $n = \dim E$.

C'est trivial si $n = 1$. Au rang n :

- Si $\mathcal{G}$ est irréductible, c'est III.10.b.
- Si $\mathcal{G}$ n'est pas irréductible, on décompose $E = V \oplus W$.

$\mathcal{G}_W \doteq \{ g_W / g \in \mathcal{G} \}$ est un sgroupe de $GL(W)$ tel que pour tout g_W de $\mathcal{G}_W$ les valeurs propres de g_W sont de module 1.

L'hypothèse récurrente montre que : $\inf_{g \in \mathcal{G}} \|g_W(x)\| > 0$

Supposons, par l'absurde, que $\inf_{g \in \mathcal{G}} \|g(x)\| = 0$. Il existe alors une suite $(g_i)_i$ de $\mathcal{G}$ telle que $\lim_{i \to +\infty} \|g_i(x)\| = 0$

$x = v + w$ avec $v \in V$ et $w \in W$, d'où $g_i(x) = g_i(v) + g_i(w)$

et V étant stable par g_i, $g g_i(x) = g g_i(w)$ d'où :

$$\|g_{i_w}(w)\| \leq \|g\| \underbrace{\|g_i(x)\|}_{\to 0}$$

en contradiction avec $\inf_{g \in g} \|g_w(w)\| > 0$.

III.12.a $g_n\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi\\ n\xi+\eta\end{pmatrix}$

* $g = \{g_n / n \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas vide, g_n est un automorphisme de $E = \mathbb{C}^2$ car $\begin{vmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$ et g_n^{-1} est de matrice $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -n & 1\end{pmatrix}$ donc $g_n^{-1} = g_{-n} \in g$.

Enfin $g_n \circ g_p = g_{n+p} \in g$. g est bien un sous-groupe de $GL(E)$.

* Le polynôme caractéristique de g_n est :

$$\chi_{g_n}(X) = \begin{vmatrix}1-X & 0\\ n & 1-X\end{vmatrix} = (1-X)^2$$

donc 1 est l'unique valeur propre de chaque g_n (de module 1)

III.12.b

* g n'est pas irréductible : le sev propre de g_n est la droite $\mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ si $n \neq 0$, et $\mathbb{C}^2$ si $n = 0$.
Cette droite est stable par g.

* On vérifie que $\inf_n \|g_n(x)\| > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$:

$\|g_n(x)\| = |\xi| + |n\xi + \eta|$ donc $\begin{cases}\|g_n(x)\| \geq |\xi| & \text{si } \xi \neq 0\\ \text{ou}\\ \|g_n(x)\| = |\eta| \geq |\eta| & \text{si } \xi = 0\end{cases}$

* Mais g n'est pas borné :

$$\|g_n\| = \sup_{|\xi|+|\eta|=1} (|\xi| + |n\xi+\eta|) \geq 1 + |n| \quad \text{(faire } \xi = 1 \text{ et } \eta = 0)$$

Cet exemple montre que le résultat du III.10.a ne se généralise pas au cas où g n'est pas irréductible.

FIN

Indications

"Pour ne pas sécher plus de 3/5 mn et orienter les compléments de cours à apporter"

(?) = la vérifier et/ou revoir le cours à ce sujet

II.6.b Utiliser I.5

II.7.a

- Tout revient à montrer que $\{\mathrm{tr}(g) / g \in \mathcal{G}\}$ est fini (?)
- $g^4 = \mathrm{Id}$ ⟶ que dire des valeurs propres de g ?
- $g \in \mathcal{L}$ est trigonalisable (?) donc $\mathrm{tr}(g) = \dots$

II.8.b Montrer que $g = I + pgq$

III.10.a Utiliser la base de $\mathcal{L}$ du II.7.b pour exprimer un élément g de $\mathcal{G}$, puis majorer les coordonnées de g dans cette base ...

III.10.b Utiliser seulement le a), le fait que $\mathcal{G}$ soit un groupe et l'égalité : $|g| = \sup_{\|x\|=1} \|g(x)\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|}$

qu'il faut connaître (?)

III.11.a Ecrire la forme de la matrice de g dans une base dont les premiers éléments forment une base de V, et les suivants une base de W...

III.11.b Récurrence sur $n = \dim E$. Si $\mathcal{G}$ est irréductible c'est III.10.b. Sinon, l'hypothèse récurrente s'applique à $\{g_W / g \in \mathcal{G}\}$ qui est un sgroupe de $GL(W)$. Raisonner alors par l'absurde en supposant que $\inf_{g \in \mathcal{G}} \|g(x)\| = 0$ ...